م 4

/ /

مبرهنة:

إذا كان V فضاء جداء داخلي فإن الدالة:

$V \longrightarrow R_+ \; ; \; x \longrightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

تعرف نظيماً على V نقول انه مولد من الجداء الداخلي

البرهان:

-1- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geqslant 0$

$\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

-2- $\|ax\| = \sqrt{\langle a x, ax\rangle} = \sqrt{a^2 \langle x, x\rangle} = |a| \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$= |a| \|x\|$

-3- $\|x+y\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$

$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$

$= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$

$\leq \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle$

من متباينة شوارتز نعلم أن $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \Leftarrow$

$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \sqrt{\langle y, y\rangle}$

ومنه نجد على أن

$\|x+y\|^2 \leq \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle$

$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$

$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \xRightarrow{\text{بالجذر}} \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ومنه نستنتج الدالة المعرفة سابقاً تعرف نظيماً.

/ /

نتائج:

1. كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم وبالتالي هو فضاء متري.

2. إذا كان V فضاء جداء داخلي و $\|\ \|$ النظيم المولد بالجداء الداخلي فعندئذ تتحقق المساواة:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

التي تدعى مساواة متوازي الأضلاع

ونلاحظ أنه إذا لم يحقق نظيم هذه المساواة فلا يمكن أن يكون ناتج من جداء داخلي.

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle$$
$$=\langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle$$
$$=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$
$$=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

تعريف (فضاء بناخ)

ليكن (V,N) فضاءً منظماً و d المسافة على V المولدة بالنظيم، إذا كان (V,d) فضاءً مترياً تاماً فنقول عن V أنه فضاء باناخ.

نهاية الدوال:

تعريف: ليكن (E,d_E) و (F,d_F) فضائين متريين و f تطبيقاً معرفاً على مجموعة جزئية A من E ويأخذ قيمه في F، ولنفرض أن $a\in\bar{A}$ و $b\in F$ نقول أن $f(x)$ تسعى (تنتهي) إلى b عندما تسعى x إلى a ونكتب $\lim_{x\to a}f(x)=b$ إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ε، عدد حقيقي موجب δ بحيث أنه إذا كان $x\in A$ و $d_E(x,a)<\delta$ فإن $d_F(f(x),b)<\varepsilon$

ملاحظة:

ليكن (E,d_E) و (F,d_F) فضائين متريين و f تطبيقاً معرف على مجموعة جزئية A من E ويأخذ قيمه في F ولنفرض أن $a\in A$ و $b\in F$ إن الشرط اللازم والكافي كي يكون ~~نهاية~~ $\lim_{x\to a}f(x)=b$ هو أن تتقارب المتتالية $f(x_n)$ من b وذلك

أي أ كانت المتتالية x_n من A والمتقاربة من a.

البرهان:

($\Rightarrow$) لزوم الشرط: لنفرض أن $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ولنفرض أن x_n متتالية من عناصر A متقاربة من النقطة a.

عندئذٍ إذا كان $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث إذا كان $x \in A$ و $d_E(x, a) < \delta$ فإن $d_F(f(x), b) < \varepsilon$، كما يوجد عدد صحيح موجب N_0 بحيث إذا كان $n \geq N_0$ فإن $d(x_n, a) < \delta$ وبالتالي إذا كان $n \geq N_0$ فإن $d_F(f(x_n), b) < \varepsilon$ وهذا يعني أن نهاية $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$ أي أن المتتالية $f(x_n)$ متقاربة من النقطة b.

($\Leftarrow$) كفاية الشرط: لنفرض أن المتتالية $f(x_n)$ متقاربة من النقطة b أي $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$ وذلك من أجل أي متتالية x_n من A متقاربة من a ولنفرض جدلاً أن $\lim_{x \to a} f(x) \neq b$ عندئذٍ يوجد عدد حقيقي موجب ε بحيث أن:

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+^* ; \exists x \in A ; d_E(x, a) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), b) \geq \varepsilon$$

وبالتالي

يوجد لكل عدد صحيح موجب n نقطة x_n من A بحيث يكون $d_E(x_n, a) < \delta \Rightarrow$

$$d_F(f(x_n), b) \geq \varepsilon$$

وهكذا نكون وجدنا متتالية x_n من عناصر A متقاربة من النقطة a ولكن متتالية القيم $f(x_n)$ ليست متقاربة من b وهذا مخالف للفرض فالفرض الجدلي خاطئ أي أن نهاية $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

نتيجة:

إذا وجدت متتاليتان x_n ، y_n في A متقاربتان من a وكان:

$$\lim_{x \to a} f(x_n) \neq \lim_{x \to a} (f(y_n))$$

فإننا نستنتج حسب المبرهنة الأخيرة أنه ليس للدالة f نهاية عند النقطة a

مبرهنة:

لتكن f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A و B من R^n ولتكن a نقطة من $\overline{A\cap B}$ إذا افترضنا وجود النهايتين $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ فإن:

1- $$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

2- $$\lim_{x\to a}(f.g)(x)=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)$$

3- إذا كان $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

البرهان:

نفرض أن $\lim\limits_{x\to a}f(x)=p$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=q$

1) إذا كان ε عدداً حقيقياً موجباً فإن:

$$\exists\delta_1\in R_+^*;\ \forall x\in A;\ d(x,a)<\delta_1\Rightarrow d(f(x),p)=|f(x)-p|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\delta_2\in R_+^*;\ \forall x\in B;\ d(x,a)<\delta_2\Rightarrow d(g(x),q)=|g(x)-q|<\frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي: يوجد $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)\in R_+^*$ بحيث $\forall x\in A\cap B$ و $d(x,a)<\delta$

فإن $d(f(x)+g(x),\ p+q)=|f(x)+g(x)-p+q|$

$$=|(f(x)-p)+(g(x)-q)|\leq|f(x)-p|+|g(x)-q|$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon$$

/ /

ومنه ينتج أن: $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=p+q$

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

2) إذا كان ε عدداً حقيقياً موجباً ما فإنه

$\exists \delta_3 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x\in A ; d(x,a)<\delta_3 \Rightarrow d(f(x),p)=|f(x)-p| < \min\left(\frac{\varepsilon}{3|q|},\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\right)$

$\exists \delta_4 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x\in B ; d(x,a)<\delta_4 \Rightarrow d(g(x),q)=|g(x)-q| < \min\left(\frac{\varepsilon}{3|p|};\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\right)$

$\exists \delta'=\min(\delta_3,\delta_4)\in\mathbb{R}_+^*,\ d(x,a)<\delta' ; |f(x).g(x)-pq|=$

$$=|(f(x)-p)q+(g(x)-q)p+(f(x)-p)(g(x)-q)|$$

$$\le |f(x)-p||q|+|g(x)-q||p|+|f(x)-p|.|g(x)-q|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3|q|}.|q|+\frac{\varepsilon}{3|p|}.|p|+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

أي أن $\lim_{x\to a}f(x).g(x)=pq \Rightarrow \lim_{x\to a}f(x).g(x)=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)$

3) إذا كان ε عدداً حقيقياً موجباً ما فإنه

$\exists \delta_5\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall x\in A ; d(x,a)<\delta_5 ; |f(x)-p|<\frac{\varepsilon|q|}{4}$

$\exists \delta_6\in\mathbb{R}_+^* ; \forall x\in B ; d(x,a)<\delta_6 ; |g(x)-q|<\min\left(\frac{|q|}{2},\frac{\varepsilon|q|^2}{4|p|}\right)$

/ /

وبالتالي توجد : $\delta'' = \min(\delta_5, \delta_6) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A \cap B ; d(x,a) < \delta''$

من الفرض

$$|q| - |g(x)| \leq |g(x) - q| < \frac{|q|}{2} \Rightarrow$$

جنبه ٤ ←

$$\Rightarrow |g(x)| \geq \frac{|q|}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{(f(x)-p)q + (q-g(x))p}{g(x).q} \right| \leq \frac{|f(x)-p||q| + |q-g(x)||p|}{|g(x)|.|q|}$$

$$< \frac{\frac{\varepsilon|q|}{4}.|q| + \frac{\varepsilon|q|^2}{4|p|}.|p|}{\frac{|q|}{2}.|q|} = \frac{\frac{\varepsilon|q|^2}{4} + \frac{\varepsilon|q|^2}{4}}{\frac{|q|^2}{2}} = \frac{\frac{\varepsilon|q|^2}{2}}{\frac{|q|^2}{2}} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{p}{q} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

تمارين :

III إذا كانت f الدالة المعرفة بالشكل :

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \frac{x^3 \cos y}{x^2 + y^2}$$

فاثبت أن $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$

الحل : يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ بحيث أن $\varepsilon = \delta$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} ; \quad d_2((x,y),(0,0)) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\Rightarrow d(f(x,y), 0) = |f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \left| \frac{x^3 \cos y}{x^2 + y^2} \right| \leq$$

$$|x| \frac{x^2}{x^2+y^2} |\cos y| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

(فوق $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ و $|\cos y|$: ≥ 1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$ أي أن

5/5